

۱- الف) اگر $2^x = 15$ و $15^y = 32$ باشد xy را حساب کنید.

$$15^y = (2^x)^y = 2^{xy} = 32$$

$$2^{xy} = 2^5 \Rightarrow xy = 5$$

$$27^x \times 9^{x-2} = 81^4$$

ب) معادله توانی مقابل را حل کنید. (۱/۵ نمره)

$$(3^x) \times (3^2)^{x-2} = 3^{3x} \times 3^{2x-4} = 3^{5x-4} = 81^4 = 3^{16}$$

$$\Rightarrow 5x - 4 = 16 \longrightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

۲- حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

$$\sqrt{32} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{72} - \sqrt{8}$$

ابتدا با استفاده از تجزیه اعداد رادیکالی را به ساده ترین صورت می نویسیم

$$4\sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{2} + 3 \times 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 18\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

۳- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید. (۱/۵ نمره)

$$\frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{25}}{5} = 2\sqrt[3]{25}$$

الف) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

ب) $\frac{20}{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{7}}$

$$\frac{20 \cdot [(\sqrt{5} + \sqrt{2}) + \sqrt{7}]}{[(\sqrt{5} + \sqrt{2}) - \sqrt{7}][(\sqrt{5} + \sqrt{2}) + \sqrt{7}]} =$$

$$\frac{20 \cdot [(\sqrt{5} + \sqrt{2}) + \sqrt{7}]}{2\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \sqrt{50} + \sqrt{20} + \sqrt{70} = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - 7 = 5 + 2 + 2\sqrt{10} - 7 = 2\sqrt{10}$$

۴- اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

طرفین رابطه بالا را به توان ۳ می‌رسانیم.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 3^3 - 3 \times 3 = 27 - 9 = 18$$

۵- عبارت جبری زیر را تجزیه کنید. (۲ نمره)

$$x^3 - 8x + 3$$

از دسته بندی استفاده می‌کنیم

$$x^3 - 8x + 3$$

$$x^3 - 9x + x + 3$$

$$x(x^2 - 9) + (x + 3)$$

مزدوج

$$x(x-3)(x+3) + (x+3)$$

$$(x+3)[x(x-3)+1] = (x+3)(x^2 - 3x + 1)$$

۶- نامعادله زیر را حل کنید (۱/۵ نمره)

$$\frac{-2(x-1)}{3} - \frac{3(x+1)}{2} \geq 5$$

طرفین نامعادله را در مخرج مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.

$$6\left(\frac{-2(x-1)}{3} - \frac{3(x+1)}{2}\right) \geq 5 \cdot 6$$

$$-4(x-1) - 9(x+1) \geq 30$$

$$-4x + 4 - 9x - 9 \geq 30$$

$$-13x - 5 \geq 30 \rightarrow -13x \geq 35 \Rightarrow x \leq -\frac{35}{13}$$

۷- m را طوری به دست آورید تا دو خط $(m-4)y + 2x = 5$ و $x + \frac{1}{m}y - 2 = 0$ برهم عمود باشند. (۲ نمره)

شرط عمود بودن دو خط به معادله های $y = mx + b$ و $y' = m'x + b'$ این است که $m.m' = -1$ باشد.

$$\frac{(m-4)y}{m-4} = \frac{-2x}{m-4} + \frac{5}{m-4}$$

$$y = -\frac{2}{m-4}x + \frac{5}{m-4}$$

$$\frac{1}{m}y = -x + 2 \Rightarrow y = -mx + 2m \Rightarrow \frac{-2}{m-4} \times (-m) = -1 \Rightarrow \frac{-2}{m-4} = \frac{1}{m} \Rightarrow m-4 = -2m \Rightarrow m+2m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

۸- مختصات نقطه‌ای از خط $x - 2y = 6$ را به دست آورید که:

الف) طول آن یک واحد از عرض آن بیشتر باشد. (۰/۵ نمره)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow x' = y' + 1 \Rightarrow x - 2y = 6 \Rightarrow y' + 1 - 2y' = 6 \Rightarrow -y' + 1 = 6 \Rightarrow -y' = 5 \Rightarrow y' = -5, x' = -4$$

ب) طول آن از سه برابر عرض آن یک واحد بیشتر باشد. (۰/۵ نمره)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow x' = 3y' + 1 \Rightarrow x' - 2y' = 6 \Rightarrow 3y' + 1 - 2y' = 6 \Rightarrow y' = 5, x' = 16$$

پ) طول و عرض آن قرینه باشد. (۰/۵ نمره)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow y' = -x' \Rightarrow x' + 2x' = 6 \Rightarrow 3x' = 6 \Rightarrow y' = -2, x' = 2$$

۹- مقدار m را طوری تعیین کنید که خط گذرنده از نقاط $A = \begin{bmatrix} 2m-3 \\ 1-m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. (۱/۵ نمره)

الف) موازی محور طول‌ها باشد.

$$1-m = 3 \Rightarrow -m = 2 \Rightarrow m = -2$$

یعنی دو نقطه دارای عرض‌های برابر باشند

ب) موازی محور عرض‌ها باشد.

$$2m-3 = 5 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$$

یعنی دو نقطه دارای طول‌های برابر باشند

(پ) از مبدأ مختصات بگذرد.

$$y^\circ - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x^\circ - x_1) \Rightarrow -3 = \frac{1 - m - 3}{2m - 3 - 5} (-5)$$

$$\Rightarrow -6m + 24 = (-m - 2)(-5) \Rightarrow -6m + 24 = 5m + 10 \Rightarrow -11m = -14 \Rightarrow m = \frac{14}{11}$$

۱۰- طول ضلع قاعده هرم مربع القاعده منتظمی $5\sqrt{2}$ و اندازه یال جانبی آن ۱۳ می باشد، نسبت حجم این هرم به مساحت قاعده آن چقدر است؟ (۲ نمره)

برای بدست آوردن ارتفاع هرم باید ابتدا نصف قطر مربع را بدست آوریم.

$$y^2 = (5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2$$

$$y^2 = 50 + 50 = 100$$

$$y = \sqrt{100} = 10$$

$$10 \div 2 = 5$$

$$x^2 = 13^2 - 5^2$$

$$x^2 = 169 - 25$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144} = 12 \text{ مره عافت را } 12$$

$$V = \frac{1}{3} S.h$$

قاعده

$$\frac{1}{3} .h = \frac{1}{3} \times 12 = 4$$

۱۱- نیم کره ای به شعاع ۶ سانتی متر را از آب پر کرده و سپس آب آن را در استوانه ای به شعاع ۳ سانتی متر می ریزیم، ارتفاع آب استوانه چقدر می شود؟ (۲ نمره)

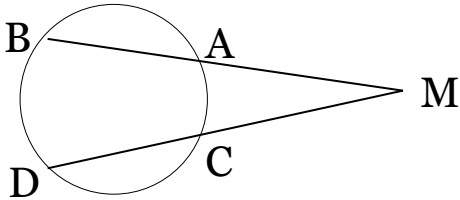
$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi 6^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 6^3$$

$$V_{\text{استوانه}} = S.h = \pi r^2 .h = \pi \times 3^2 \times h$$

$$V_{\text{نیم کره}} = V_{\text{استوانه}} \Rightarrow \pi \times 3^2 \times h = \frac{2}{3} \times \pi \times 6^3$$

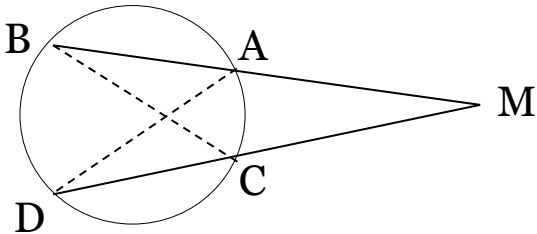
$$h = \frac{\frac{2}{3} \times \pi \times 6^3}{\pi \times 3^2} = \frac{\frac{2}{3} \times \pi \times 3^3 \times 2^3}{\pi \times 3^2} = 16$$

ارتفاع آب



۱۲- در دایره روبرو ثابت کنید . $MD \cdot MC = MB \cdot MA$ (۱/۵ نمره)

از نقطه A به D و از B به C پاره خطی رسم می کنیم و ثابت می کنیم دو مثلث $\triangle MBC$ و $\triangle MAD$ با یکدیگر متشابه اند



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} = \frac{1}{2} \widehat{AC} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{زاویه مشترک} \\ \text{زاویه} \end{array} \rightarrow \triangle MBC : \triangle MAD$$

$$\xrightarrow{\text{نسبت بین اضلاع متناظر}} \frac{MC}{MA} = \frac{BC}{AD} = \frac{MB}{MD}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین و وسطین}} \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MD \cdot MC = MB \cdot MA$$